Determinación de las características de una superficie liquida mediante la incidencia de un haz de luz

Lorena Magallanes Hernández[1], Dr. Carlos I. Robledo Sánchez[1]
[1]Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas - BUAP

Resumen

El trabajo realizado consiste en una parte teórica y una experimental, en donde se combinan conocimientos de Mecánica Clásica y de Óptica para lograr una mejor explicación del fenómeno. Fundamentalmente consistirá en determinar la forma de una superficie líquida, lo cual se realizará, mediante la incidencia de un haz de luz que proyecta una línea recta, la cual se reflejará en la superficie parabólica, proyectándose en una pantalla que nos proporcione información acerca de su forma.

Introducción: La superficie parabólica

"Existe una método muy sencillo y económico de fabricar una parábola –Aunque ésta no es muy duradera-: se coloca una cubeta con agua en una plataforma giratoria, y se la hace girar. La superficie del agua adquiere entonces forma parabólica, y la parábola se cierra más, conforme la velocidad del giro aumenta. Si se tiene la suerte de que el agua esté clara y el día soleado, el reflejo de la luz del Sol puede servir para localizar el foco de la parábola [1]."

La superficie parabólica se explica, si describimos el sistema con las fuerzas que actúan en él, elijamos una partícula de masa *m* sobre la superficie del líquido, a una distancia *x* del eje de rotación; entonces las fuerzas que actúan sobre ella, a lo largo del eje *x* son:

$$\sum \overline{F}_{X_i} = \overline{F}_c + \overline{F}_{Rx} \tag{1}$$

Donde:

$$F_c = -mxw^2 \tag{2}$$

Y:

F_R = Fuerza de las otras partículas sobre la partícula, la cual se cancelará con la Fuerza Normal perpendicular al líquido

Y a lo largo del eje *y*, son:

$$\sum \overline{F}_{Yj} = \overline{F}_g + \overline{F}_{Ry} \tag{3}$$

Donde:

$$F_g = -mg \tag{4}$$

Si la partícula está en equilibrio, la suma de todas las fuerzas que la afectan es *0*.

La forma de la superficie del líquido en equilibrio será tal que *R* es perpendicular a la tangente a la curva en cada punto.

$$\tan \vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{mxw^2}{mg} = \frac{xw^2}{g} \qquad (5)$$

Donde $\tan \theta$ es la pendiente de la recta tangente a la parábola, con respecto al eje *x*.

Integrando, tenemos:

$$y = \frac{1}{2}\frac{w^2}{g}x^2 = cr^2 \qquad c = w^2 / 2g \qquad (6)$$

Que es la ecuación de una parábola simétrica respecto del eje *y*.

A partir de la ecuación (6), se puede mostrar que todos los rayos que inciden en el espejo parabólico, paralelos al eje óptico, son reflejados por el espejo y se intersecan en el eje a la misma distancia focal L.

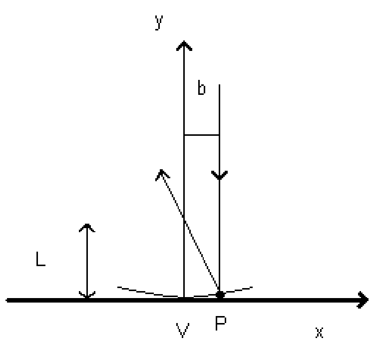

Figura 1

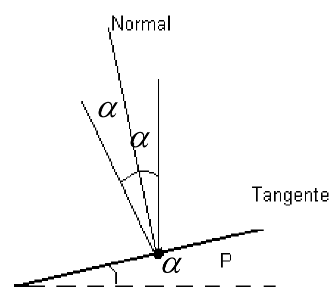

Figura 2

La Figura 1 muestra un rayo incidente en el espejo, a una distancia b del eje óptico (*y*); este rayo incide en el punto P, que tiene por coordenadas:

$$P : (x, y) = (b, cb^2) \qquad (7)$$

La Figura 2, muestra el plano tangente al espejo en el punto P, los rayos incidente y reflejado en P y algunos ángulos que nos interesan. La inclinación del plano tangente en el punto P, puede obtenerse derivando la Ecuación (6), cuando x = b. Así:

$$\tan \alpha = 2cb \qquad (8)$$

La ley de la reflexión implica que el rayo reflejado forma un ángulo de 2α con la vertical, si el plano tangente es inclinado con un ángulo α respecto a la horizontal. Entonces el haz reflejado es perpendicular al plano cuya pendiente es igual a $\tan 2\alpha$. Usando la Ecuación (8), esta inclinación se puede determinar:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{(1-\tan^2\alpha)} = \frac{2(2cb)}{1-(2cb)^2} = \frac{4cb}{1-4c^2b^2} \tag{9}$$

La inclinación *s* del rayo reflejado, es igual al recíproco negativo de (9),

$$s = \frac{-1}{\tan 2\alpha} = -\frac{1-(4c^2b^2)}{4cb} \tag{10}$$

Con ayuda de las Ecuaciones (7) y (10), podemos escribir la ecuación del haz reflejado como:

$$\frac{\left[y-cb^2\right]}{x-b} = s = -\frac{\left[1-4c^2b^2\right]}{4cb} \tag{11}$$

Haciendo r = 0, en la Ecuación (11), resolviendo para y, y sustituyendo la Ecuación (6) por c, obtendremos la distancia L a la cual el rayo reflejado interseca al eje óptico, el *foco* del paraboloide.

$$L = cb^2 + \frac{1-4c^2b^2}{4c} = \frac{1}{4c} = \frac{g}{2w^2} \tag{12}$$

La expresión (12) para *L*, no depende de la distancia *b* del eje óptico, a la cual incida el rayo. Esto significa que es una manera clara de definir la distancia focal L a partir del vértice V del paraboloide [2].

Aparato físico

Dado que hubo que cuidar que la vibración en el sistema fuera mínima para que se optimizara la superficie líquida, se probaron varios materiales, utilizando finalmente un amortiguador de hule espuma para la vibración mecánica y glicerina como el líquido que se pondría a girar. El contenedor de dicho líquido fue un recipiente plástico con las siguientes dimensiones: Diámetro: 12.6 cm., y Altura: 8cm., a una velocidad de 90 rpm. Una vez tenido el recipiente giratorio se colocó una pantalla graduada milimétricamente, a una altura de 45.7 cm., desde la mesa. El haz incidente en la superficie líquida fue obtenido de una fuente de luz laser que se emitía en línea recta y que fue colocado a una altura de 37.5 cm. sobre la mesa, apuntando hacia la superficie líquida a una inclinación de 59.9667º, de tal manera que se produjera una imagen reflejada en la pantalla milimétrica; una vez logrado eso se montó un tripie sobre el sistema para capturar esas imágenes, con una cámara digital colocada a 58 cm., de la pantalla.

Descripción geométrica de la superficie líquida

Una vez logrado el sistema mecánico sólo resta encontrar las características geométricas de la superficie líquida, lo cual se realizó mediante el cálculo del espacio geométrico de todos los puntos de intersección entre el plano de luz incidente y la superficie paraboloide, así, dados los vectores:

$\vec{s} = (\alpha, 0, \gamma)$ En el plano generado por el haz incidente.
$\vec{p} = (A, 0, 1)$ En la dirección normal al plano generado por el haz incidente.

Donde: $\alpha = 13.7\ cm.$
$\gamma = 12.5\ cm$

Obtenemos su ecuación:

$$A\alpha + 1\gamma = 0 \tag{13}$$

De lo que resulta:

$$A = -\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{12.5}{13.7} = .912408$$

Dado cualquier vector $\vec{r} = (x, y, z)$ en el plano generado por el haz incidente, tenemos:

$$-\frac{\gamma}{\alpha}x + z = 0 \tag{14}$$

Lo cual implica:

$$z = -\frac{\gamma}{\alpha}x \tag{15}$$

Sabemos que un paraboloide de revolución se puede expresar como:

$$z = \frac{x^2+y^2}{2R} \tag{16}$$

Sustituyendo por el valor de la ecuación (15), tenemos:

$$-2R\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)x = x^2 + y^2 \tag{17}$$

Que, junto con (15) determinan el lugar geométrico de todos los puntos de intersección entre el plano generado por el haz incidente y la superficie paraboloide, y queda demostrado que dicho lugar geométrico es una parábola.

Conclusiones

- Se dedujo matemáticamente que la superficie del espejo debía tener forma parabólica.
- Se hallaron tanto los materiales como los aparatos necesarios para armar el sistema mecánico más óptimo que hiciera posible realizar el experimento.

- Se comprobó experimentalmente que la superficie líquida era una parábola y hallaron algunas de sus características geométricas.
- Resta comparar la expresión obtenida con los datos experimentales, de tal manera que se determine particularmente la geometría de nuestra superficie líquida.

Agradecimientos

Al Doctor Carlos I. Robledo Sánchez, por darme la oportunidad de realizar este proyecto bajo su tutela y a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por permitirme participar en el programa “La ciencia en tus manos”.

Referencias

[1] CETTO, Ana María. La luz en la naturaleza y en el laboratorio. Colección: La Ciencia para todos. FCE. México DF.
[2] GRAUMANN, Hugo y LAUE Hans. Concave Liquid Mirror Experiments. The Physics Teacher. Vol. 36. (1998).